Impulsna i Dirac delta f-ja

Dirac delta f-ja $\delta(t)$ je određena sa sljedeće dvije osobine

(1) $$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

i

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)$$

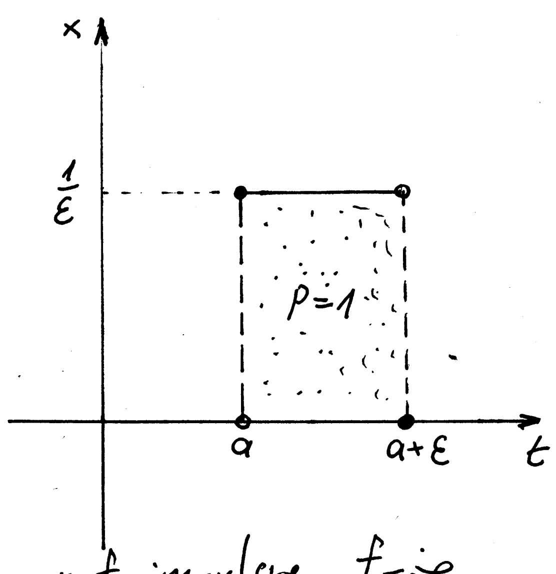
za bilo koju f-ju $f(t)$ koja je neprekidna na otvorenom intervalu koji sadrži $t=0$.

Laplaceova transformacija Dirac delta f-je:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = e^{-as}$$

Ispostavi se da je Dirac delta f-ja izvod jedinične stepene f-je:

$$\delta(t-a) = u'(t-a)$$

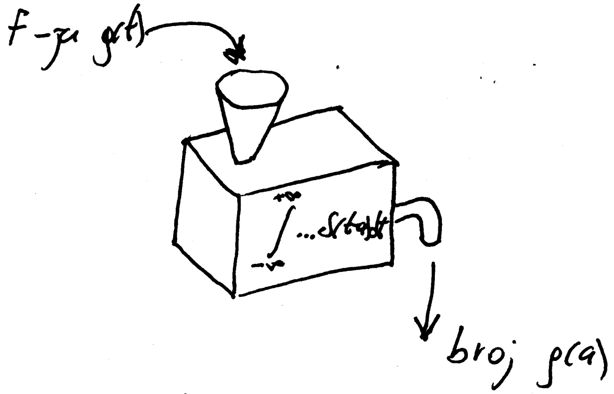


graf impulsne f-je

$$d_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & a \le t < a+\varepsilon \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} d_{a,\varepsilon}(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a)$$



dijagram koji ilustrira na koji način delta f-ja "izvlači" vrijednost g(a)

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 3\delta(t-\pi), \quad x(0)=1, \quad \frac{dx}{dt}(0)=0.$$

Rj. Neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$. Kako je

$$\mathcal{L}\{x''\}(s) = s^2 X(s) - s \quad i \quad \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}(s) = e^{-\pi s}$$

primjenjujući Laplaceovu transformaciju na obe strane date diferencijalne jednačine povlači

$$s^2 X(s) - s + 9X(s) = 3e^{-\pi s}$$

$$(s^2+9)X(s) = s + 3e^{-\pi s}$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2+9} + e^{-\pi s}\frac{3}{s^2+9}$$

$$= \mathcal{L}\{\cos 3t\}(s) + e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s)$$

Koristeći osobinu translacije po t

$$\underline{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = f(t-a)\,u(t-a)}$$

da bi odredili inverznu Laplace-ovu transformaciju od $X(s)$, imamo

$$x(t) = \cos 3t + [\sin 3(t-\pi)]\,u(t-\pi) = \begin{cases} \cos 3t, & t-\pi<0 \\ \cos 3t - \sin 3t, & t-\pi>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cos 3t, & t<\pi \\ \sqrt{2}\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right), & \pi<t \end{cases}$$

(7) Riješiti diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

$$x'' + 4x = 8\delta(t-2\pi), \quad x(0)=3, \quad x'(0)=0.$$

Rj.

Primjenjujući Laplaceovu transformaciju na datu diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$s^2 X(s) - 3s + 4X(s) = 8e^{-2\pi s}$$

$$(s^2+4)X(s) = 3s + 8e^{-2\pi s}$$

$$X(s) = \frac{3s}{s^2+4} + \frac{8}{s^2+4}e^{-2\pi s}$$

Koristeći osobinu translacije po t

$$x(t) = 3\cos 2t + 4u(t-2\pi)\sin 2(t-2\pi) = \begin{cases} 3\cos 2t, & t-2\pi<0 \\ 3\cos 2t + 4\sin 2t, & t-2\pi>0 \end{cases}$$

$$\sin(2t-4\pi) = \sin 2t \cos 4\pi - \sin 4\pi \cos 2t = \sin 2t$$

Prema tome

$$x(t) = \begin{cases} 3\cos 2t, & t<2\pi \\ 3\cos 2t + 4\sin 2t, & t>2\pi \end{cases}$$

Zadaci za vježbu

1. Izračunati date integrale

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2-1)\,\delta(t)\,dt$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 3t\,\delta(t-\frac{\pi}{2})\,dt$

(c) $\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\,\delta(t-1)\,dt$

2. Odrediti Laplaceovu transformaciju datih f-ja

(a) $\delta(t-1)-\delta(t-3)$ (b) $t\,\delta(t-1)$ (c) $\delta(t-\pi)\sin t$

3. Riješiti diferencijalne jednačine sa datim uslovom

(a) $w''+w=\delta(t-\pi)$, $w(0)=0$, $w'(0)=0$;

(b) $y''+2y'-3y=\delta(t-1)-\delta(t-2)$, $y(0)=2$, $y'(0)=-2$;

(c) $y''-y=4\delta(t-2)+t^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$;

(d) $w''+6w'+5w=e^t\delta(t-1)$, $w(0)=0$, $w'(0)=4$;

(e) $y''+y=\delta(t-2\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

(f) $y''+y=-\delta(t-\pi)+\delta(t-2\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Odgovori

1.

(a) -1 (b) -1 (c) e^{-2}

2.

(a) $e^{-s}-e^{-3s}$ (b) e^{-s} (c) 0

3.

(a) $-(\sin t)u(t-\pi)$

(b) $e^{t}+e^{-3t}+\frac{1}{4}(e^{t-1}-e^{3-3t})u(t-1)-\frac{1}{4}(e^{t-2}-e^{6-3t})u(t-2)$

(c) $2(e^{t-2}-e^{-(t-2)})u(t-2)+2e^{t}-t^{2}-2$

(d) $e^{-t}-e^{-5t}+\frac{e}{4}(e^{1-t}-e^{5-5t})u(t-1)$

(e) $\sin t+(\sin t)u(t-2\pi)$

(f) $\sin t+(\sin t)u(t-\pi)+(\sin t)u(t-2\pi)$